



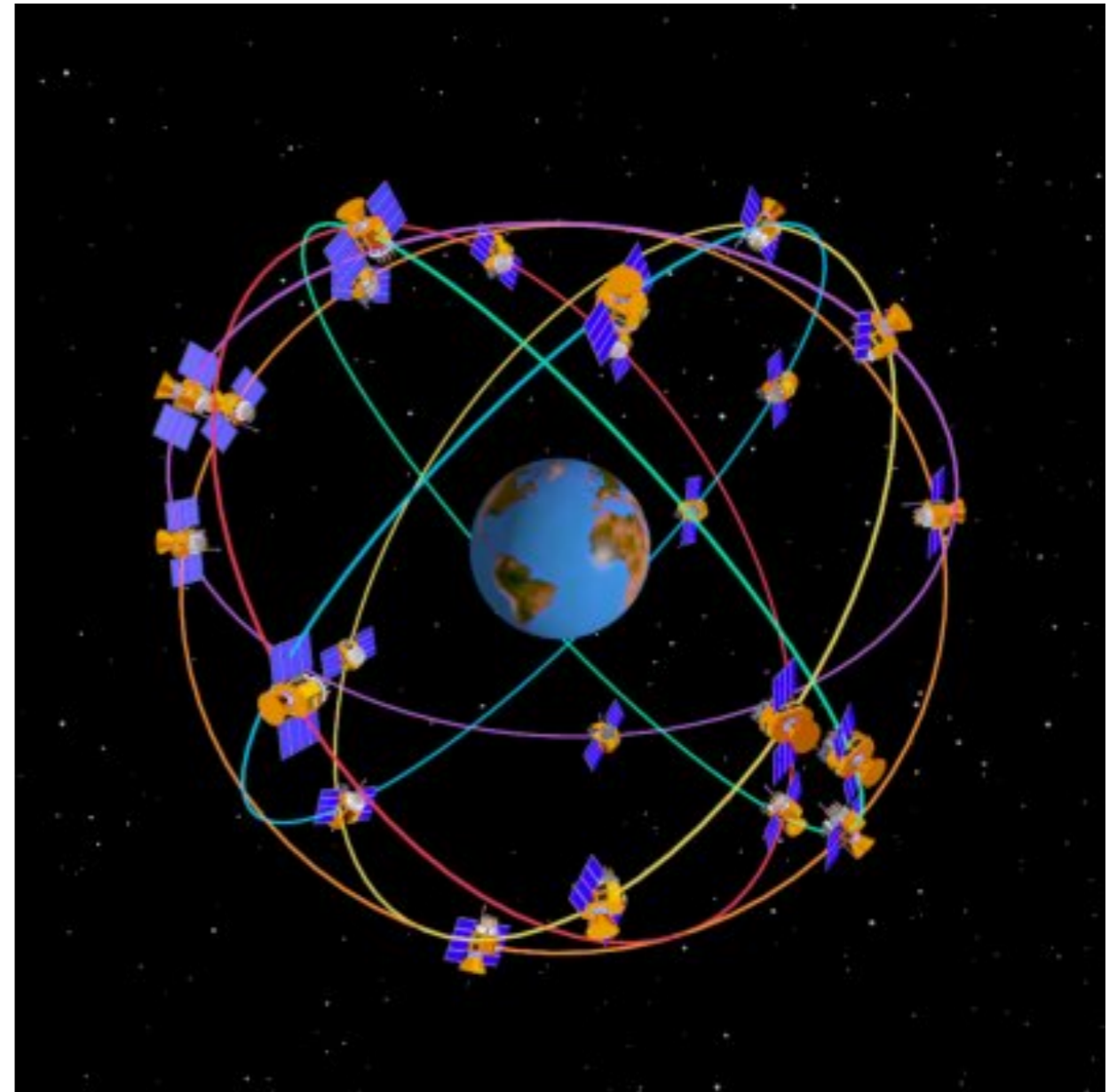
Il GPS e la Relatività

- Il sistema GPS
- Qualche idea sulla **Relatività Ristretta** e sulla **Relatività Generale**
- Il GPS non funzionerebbe se non si conoscessero entrambe



Il sistema GPS: Global Positioning System

- 24 satelliti in orbita a circa 20000 km d'altezza
- 6 orbite inclinate di 55° sull'equatore
- almeno 4 sempre visibili ovunque
- ogni satellite ha un orologio atomico al cesio con precisione di 1 su 10^{14}



1 GIORNO

$$24 \times 60 \times 60 = 86400s$$

ERRORE in 1 giorno

$$86400 s / 10^{14} = 8.610^{-10} s = 0.86 ns$$



Dove sono ?

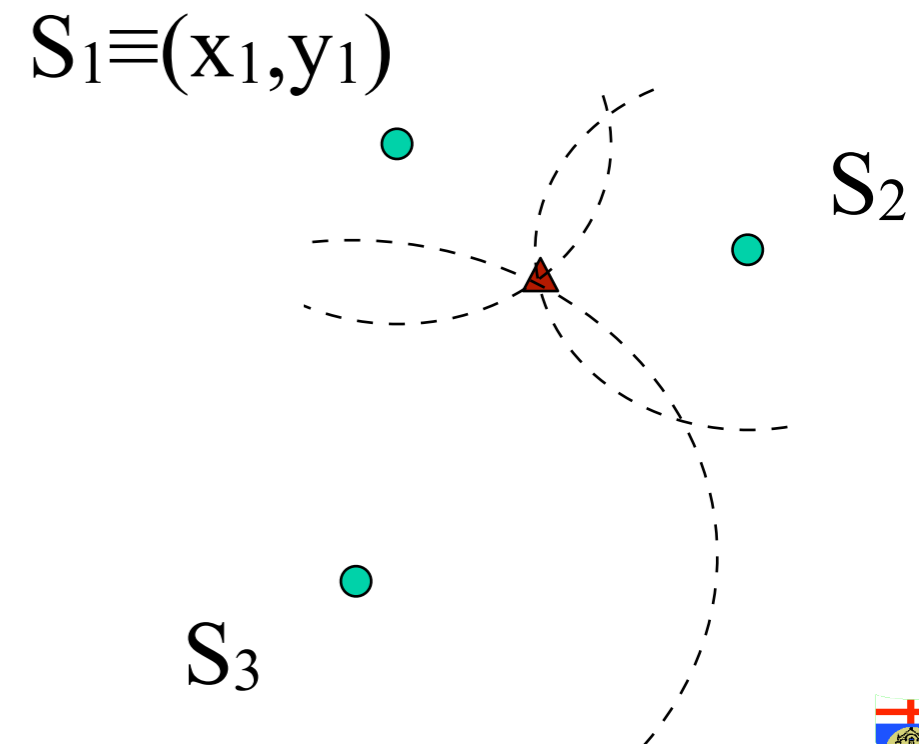
- Almeno 4 satelliti mi mandano frequentemente un segnale che contiene l'ora esatta (al ns circa) dell'istante in cui il segnale è partito e la posizione del satellite (orbite ellittiche)
- Il dispositivo risolve il sistema di equazioni e trova il tempo e la posizione
- E' più facile da visualizzare in 2 dimensioni. In tal caso servono tre punti:

$$c (t - t_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$c (t - t_2) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$c (t - t_3) = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}$$

- Con **0.86 ns** di errore, la precisione può essere di circa 30 cm (in teoria)





Che c'entra la Relatività ??

- C'entra moltissimo, e in molti modi.
- Senza una conoscenza accurata della Teoria della Relatività Ristretta e della Teoria della Relatività Generale (la teoria completa della Gravitazione) il GPS non funzionerebbe
- Per molti motivi:
 - **Relatività ristretta:** i satelliti si muovono rispetto al ricevitore, e il loro orologio **va più piano**
 - **Relatività Generale:** i campi gravitazionali **cambiano sia la velocità degli orologi**, sia la **propagazione dei segnali radio**
 - **La Terra ruota su se stessa, inducendo ulteriori effetti più raffinati**



Relatività 1

- Alla base del sistema GPS, c'è il postulato fondamentale della teoria della relatività, ovvero il fatto che la **velocità della luce** (e quindi la velocità di tutti i segnali radio) è **costante**, e indipendente dal moto della sorgente e del ricevitore.
- La posizione di un ricevitore è determinata facendo una “triangolazione” ottenuta misurando il tempo di percorrenza del segnale emesso da alcuni satelliti in orbita terrestre

$$D = c \Delta t$$

- Se fosse vera la fisica di Galileo-Newton la velocità di un segnale emesso da un satellite in orbita dipenderebbe da direzione e velocità del satellite, rendendo impraticabile il calcolo.



La relatività ristretta in una slide

- Il fatto che la velocità della luce sia una costante universale implica che il nostro concetto intuitivo di spazio e tempo vada rivisto
- Osservatori in moto relativo uno rispetto all'altro misurano intervalli di tempo e lunghezze diverse
- In particolare:
 - il tempo si dilata, quindi un orologio appare andare più piano
 - lo spazio si contrae
- I satelliti GPS sono in moto



Relatività 2: dilatazione dei tempi

- Un orologio in movimento va più piano di un orologio in quiete.
 - Velocità del satellite: 3.8 km/s

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,000000000000834 \quad \Rightarrow \quad 7.1 \mu s / g$$

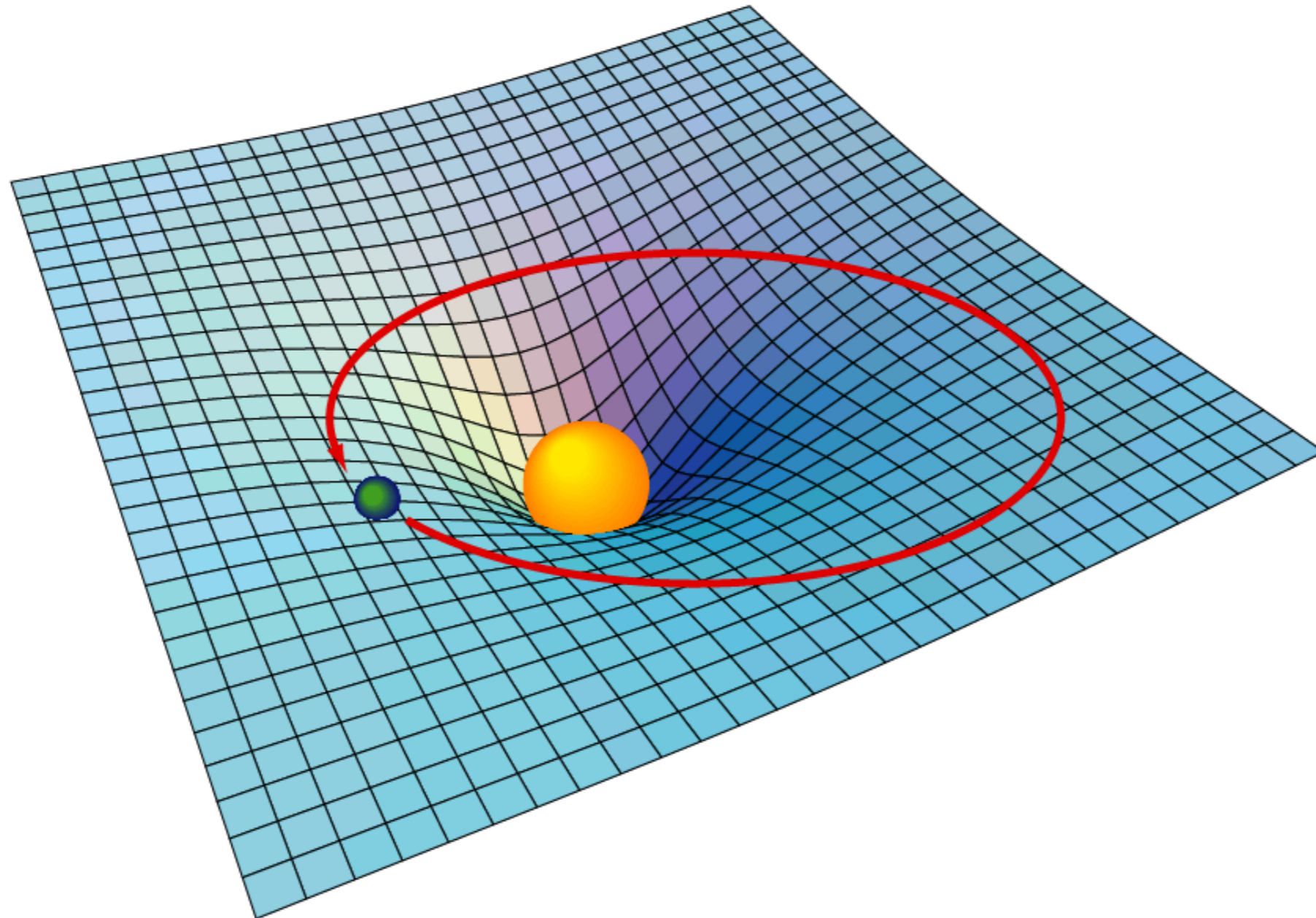
- Questo è l'errore indotto dal moto del satellite a causa della relatività

$$7.1 \mu s \cdot c = 2.2 \text{ km}$$



La Relatività Generale in una figura

- Beh, circa.....





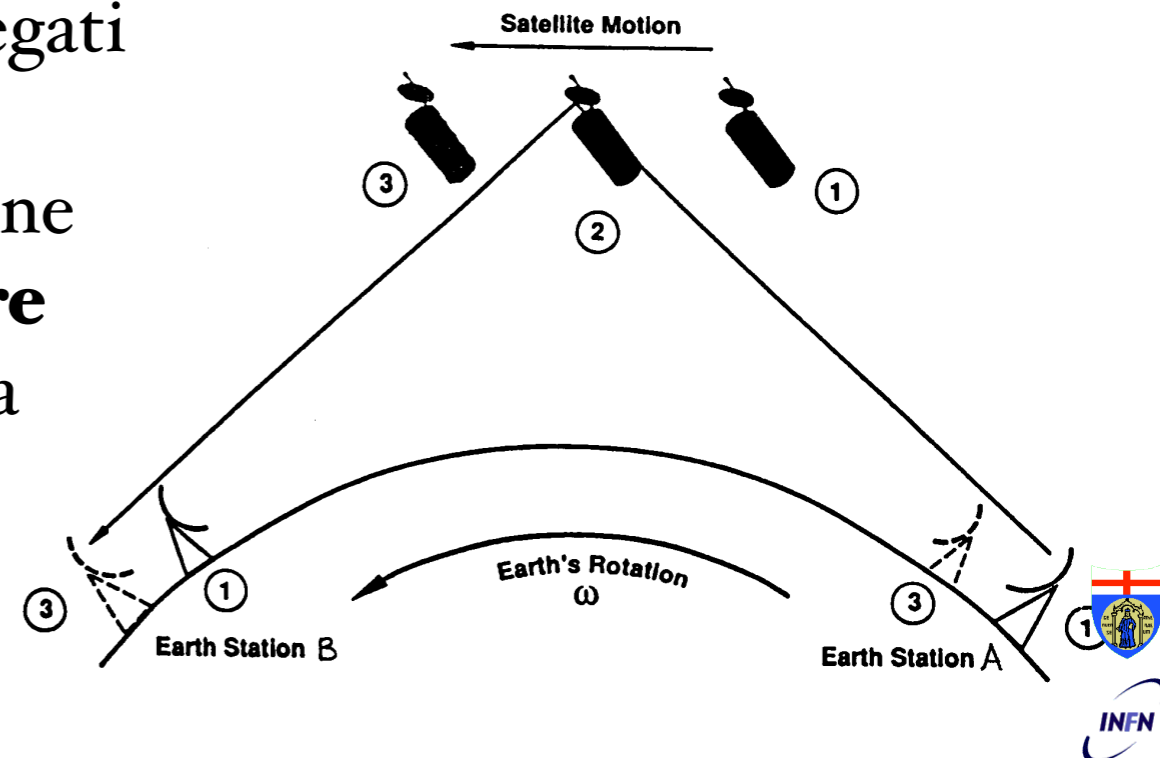
Relatività 3: curvatura temporale

- Un campo gravitazionale curva lo spazio-tempo
- Ovvero, gli intervalli temporali e spaziali sono deformati dalla presenza di un campo
- Gli orologi a Terra hanno un campo gravitazionale molto più grande di quello che sentono i satelliti a circa 20000 km d'altezza
- L'effetto è ancora più grande, e di segno opposto, rispetto alla RR
- **45.7 μ s al giorno !**
- **senza correzione, 15 km di errore!**



Come fare ?

- Una volta capita la fisica, la soluzione è semplice.
- Gli orologi dei satelliti vanno volutamente ad una velocità diversa (quindi non sono uguali a quelli a Terra)
- I clock nominali a Terra vanno a **10.230000000000 MHz**
- Quelli sui satelliti: **10.2299999954326 MHz**
- Vi sono ancora alcuni effetti PERIODICI legati all'orbita non circolare dei satelliti, e al cosiddetto effetto Sagnac (legato alla rotazione della Terra) che sono **corretti sul ricevitore** perchè dipendono dalla posizione relativa fra ricevitore e satelliti nonché dalla latitudine





Conclusione

- Il GPS è uno strumento ormai essenziale per i mezzi di trasporto, in mare soprattutto dove la localizzazione è un problema antico e sempre attuale.
- Il suo funzionamento è strettamente legato alla Teoria della Relatività, sia ristretta sia generale